Risikoaversion und internationale Portfolio-Diversifizierung

Erwarteter Nutzen: $E(U) = qU(C_1) + (1-q)U(C_2)$

Szenario 1: $C_1 = \left(\alpha H_1 + (1-\alpha)F_1\right) * W$ $\qquad \dfrac{C_1 - WF_1}{\left(WH_1 - WF_1\right)} = \alpha$

Szenario 2: $C_2 = \left(\alpha H_2 + (1-\alpha)F_2\right) * W$ $\qquad \dfrac{C_2 - WF_2}{\left(WH_2 - WF_2\right)} = \alpha$

Bestimmung des α, das den erwarteten Nutzen maximiert:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial \alpha} = q\frac{\partial U(C_1)}{\partial C_1}\left[H_1 - F_1\right]W + (1-q)\frac{\partial U(C_2)}{\partial C_2}\left[H_2 - F_2\right]W \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\left[H_1 - F_1\right]}{\left[H_2 - F_2\right]} = -\frac{(1-q)\dfrac{\partial U(C_2)}{\partial C_2}}{q\dfrac{\partial U(C_1)}{\partial C_1}}$$

Erwarteter Nutzen: $E(U) = q\ln C_1 + (1-q)\ln C_2$

$$\frac{\left[H_1 - F_1\right]}{\left[H_2 - F_2\right]} = -\frac{(1-q)}{q}\frac{C_1}{C_2} = -\frac{(1-q)}{q}\frac{\left(\alpha H_1 + (1-\alpha)F_1\right)*W}{\left(\alpha H_2 + (1-\alpha)F_2\right)*W}$$

$$\left[H_1 - F_1\right]\left(\alpha H_2 + (1-\alpha)F_2\right)\frac{q}{(1-q)} = -\left[H_2 - F_2\right]\left(\alpha H_1 + (1-\alpha)F_1\right)$$

Graphische Lösung:

Der erwartete Nutzen hängt ab vom Konsum in Szenario 1 und Szenario 2.

Um ein bestimmtes erwartetes Nutzenniveau $\overline{E}(\overline{U})$ zu erreichen, muss ein geringeres C_1 durch ein höheres C_2 kompensiert werden.

Konvexe Indifferenzkurven $\overline{E}(\overline{U})$:

- Abnehmender Grenznutzen.
- Sinkt der Konsum im Szenario 1 um 1 Einheit, so sinkt auch der Nutzen.

- Je geringer der Konsum im Szenario 1 ist, umso grösser ist der Nutzenverlust $\frac{\partial U(C_1)}{\partial C_1}(-1)$ und zwar aufgrund des sinkenden Grenznutzens. Der Konsum in Szenario 2 muss also um mehr ansteigen als 1, um den Nutzenverlust aus Szenario 1 zu kompensieren. Nur so bleibt die Investorin auf der Indifferenzkurve.
- Sie wird also nicht einfach die Anlage mit der höchsten erwarteten Rendite wählen, sondern auch darauf achten, dass die beiden Szenarien nicht zu grosse Unterschiede im Konsum mit sich bringen.
- Sie behält die Variabilität des Portfolios im Auge.

Die Investorin kann nicht zwischen Szenario 1 und Szenario 2 wählen. Die Szenarien treten mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ein. Die Investorin kann aber zwischen Inland- und Auslandinvestitionen wählen. Es geht um die Bestimmung des optimalen α.

Welches α maximiert den erwarteten Nutzen $E(U)$?

Budgetbeschränkung: Für gegebene Renditen und gegebenes q wird mit α auch die Konsumniveaus C_1 und C_2 festgelegt.

Szenario 1: $C_1 = (\alpha H_1 + (1-\alpha)F_1) * W$ $\qquad \frac{C_1 - WF_1}{(WH_1 - WF_1)} = \alpha$

Szenario 2: $C_2 = (\alpha H_2 + (1-\alpha)F_2) * W$ $\qquad \frac{C_2 - WF_2}{(WH_2 - WF_2)} = \alpha$

$$\frac{C_1 - WF_1}{(WH_1 - WF_1)} = \frac{C_2 - WF_2}{(WH_2 - WF_2)}$$

$$C_1 = (C_2 - WF_2)\frac{(WH_1 - WF_1)}{(WH_2 - WF_2)} + WF_1$$

$$C_1 - C_2\frac{(H_1 - F_1)}{(H_2 - F_2)} = W\left(F_1 - F_2\frac{(H_1 - F_1)}{(H_2 - F_2)}\right) = W\left(\frac{F_1(H_2) - F_2(H_1)}{(H_2 - F_2)}\right)$$

$$C_1 + C_2\frac{(H_1 - F_1)}{(F_2 + H_2)} = W\left(\frac{F_2 H_1 - F_1 H_2}{(F_2 - H_2)}\right)$$

Da gilt $H_1 > F_1$ und $F_2 > H_2$

$$C_1 + C_2 \underbrace{\frac{(H_1 - F_1)}{(F_2 + H_2)}}_{positiv} = W \underbrace{\left(\frac{F_2 H_1 - F_1 H_2}{(F_2 - H_2)} \right)}_{positiv}$$

Die Abbildung zeigt, wie die Investorin die Konsumniveaus C_1 und C_2 und damit α festlegt.

- Gewählt wird der Punkt 1 mit C_1^1 und C_2^1.
- Das dazugehörige α ergibt sich aus $\frac{C_1^1 - WF_1}{(WH_1 - WF_1)} = \alpha$

Für $\alpha = 1$ hält die Investorin nur Inlandsanlagen

Szenario 1: $C_1 = H_1 W$

Szenario 2: $C_2 = H_2 W$

Für $\alpha = 0$ hält die Investorin nur Auslandsanlagen

Szenario 1: $C_1 = F_1 W$

Szenario 2: $C_2 = F_2 W$

Was passiert, wenn sich die Rendite der Inlandsanlage H_1 in Szenario 1 ändert?

- Substitutionseffekt: Inländische Anlagen werden rentabler. Der relative Preis von C_1 ist gesunken. Also sollte α ansteigen, damit steigt auch C_1 an. C_2 sinkt jedoch.
- Positiver Einkommenseffekt: Der Ertrag des Vermögens W steigt, so dass insgesamt mehr konsumiert werden kann. Die Budgetgerade verschiebt sich nach aussen. Dieses mehr an Ertrag soll gleichmässig auf C_1 und C_2 verteilt werden. Die Investorin ist risikoavers und möchte, dass die Variabilität möglichst gering ist. Damit auch C_2 ansteigen kann, muss mehr im Ausland investiert werden, d.h. α sinken. Im Szenario 2 sind die Auslandsanlagen ertragreicher.
- Der Effekt auf α ist also nicht eindeutig.

Für $\alpha = 0$, d.h. wenn die Investorin nur Auslandsanlagen hält, ändert sich nichts. Hier bleibt der Punkt auf der alten Budgetgeraden erhalten.

Die Steigung der Budgetgeraden steigt jedoch, wenn H_1 steigt, so dass die Budgetgerade steiler wird.

Die Abbildung zeigt, wie die Investorin die Konsumniveaus C_1^2 und C_2^2 und damit α^2 festlegt.

- Gewählt wird der Punkt 2 mit C_1^2 und C_2^2. $C_1^2 > C_1^1$.
- Das dazugehörige α^2 ergibt sich aus $\frac{C_1^2 - WF_1}{\left(WH_1^2 - WF_1\right)} = \alpha^2$